Formule des compléments | Leçons: 235, 236, 239, 244, 245

Thm: Soit $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t}\, dt$ sur $]0,+\infty[$

$\forall s \in]0,1[$, $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$

Preuve: Γ est bien défini.

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} x^{-s} e^{-x}\, dx\right) t^{s-1} e^{-t}\, dt = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^{-s} e^{-x} t^{s-1} e^{-t}\, dx\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{x}\right)^s \cdot \frac{1}{t} e^{-(x+t)}\, dx\, dt$$

On effectue un changement de variable $\varphi(x,t) = (x+t, \frac{t}{x})$ inversible d'inverse

$\varphi^{-1}(u,v) = \left(\frac{u}{1+v}, \frac{uv}{1+v}\right)$ $\rightarrow$ C^1-difféo

Cette application est C^1 et $\det J_{\varphi^{-1}}(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{1+v} & \frac{-u}{(1+v)^2} \\ \frac{v}{1+v} & \frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{(1+v)^2}$

D'où $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} v^s \frac{1+v}{uv} \cdot e^{-u} \frac{u}{(1+v)^2}\, du\, dv$

$$= \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-u}\, du}_{=1} \int_0^{\infty} \frac{v^{s-1}}{1+v}\, dv \quad \text{par Fubini-Tonelli.}$$

Posons $v = e^x$ D'où $I(s) = \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{sx}}{1+e^x}\, dx$

Soit $f(z) = \frac{e^{sz}}{1+e^z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus i\pi + 2i\pi\mathbb{Z}$

On calcule le résidu de f en $i\pi$ d'où $(z-i\pi)f(z) = e^{sz} \frac{z-i\pi}{e^z - e^{i\pi}} \xrightarrow[z\to i\pi]{} e^{is\pi} e^{i\pi} = -e^{is\pi}$

On applique le théorème des résidus sur le contour Γ défini par le rectangle de sommets $-R, R, R+2i\pi, -R+2i\pi$. Ce contour enferme seulement un pôle de f à savoir $i\pi$.

Donc on a

$$\left|\int_R^{R+2i\pi} f(z)\,dz\right| = \left|\int_0^{2\pi} \frac{e^{s(R+i\theta)}}{1+e^{R+i\theta}}\, d\theta\right| \leq C e^{(s-1)R} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

$$\left|\int_{-R}^{-R+2i\pi} f(z)\,dz\right| = \left|\int_0^{2\pi} \frac{e^{s(-R+i\theta)}}{1+e^{-R+i\theta}}\, d\theta\right| \leq C' e^{-sR} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = -2i\pi e^{is\pi}$$

$$\int_{R+2i\pi}^{-R+2i\pi} f(z)\,dz = \int_{R}^{-R} f(2i\pi + x)\,dx = -e^{2i\pi s}\int_{-R}^{R} f(z)\,dz$$

Donc on fait tendre R vers $+\infty$ on obtient donc

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = -2i\pi e^{is\pi}$$

$$\Rightarrow \int_{-R}^{R} f(z)\,dz - e^{2i\pi s}\int_{-R}^{R} f(z)\,dz = -2i\pi e^{is\pi}$$

Par $R \to +\infty$

$$I(s) - e^{2i\pi s} I(s) = -2i\pi e^{is\pi}$$

D'où $I(s) = \dfrac{-2i\pi e^{i\pi s}}{1-e^{2i\pi s}} = \dfrac{\pi}{\sin \pi s}$

□

Complex Analysis, Stein and Shakarchi;

$\boxed{\text{COMPLÉMENT}}$

- Le résultat est encore vrai si on prend $s \in \mathbb{C}$, $Re(s) \in]0,1[$ (même preuve)
- Savoir montrer que Γ est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C}, Re(z) > 0\}$
- Γ se prolonge en une f$^{\circ}$ holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$ qui ne s'annule pas et admet des pôles simples en $-n$ de résidus $\dfrac{(-1)^n}{n!}$

Preuve : $0 < Re(s) < 1$, $\Gamma(s) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi s)\Gamma(1-s)} \neq 0$ le membre de droite est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C}, Re(z) < 1, -z \notin \mathbb{N}\}$, par unicité du prolongement analytique, Γ se prolonge sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$ avec cette expression donc ne s'annule pas.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $(z-(-n))\Gamma(z) = \dfrac{\pi(z+n)}{\sin(\pi z)\Gamma(1-z)} = (-1)^n \dfrac{\pi(z+n)}{\sin(\pi(z+n))\Gamma(1-z)} \xrightarrow[z \to -n]{} \dfrac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)} = \dfrac{(-1)^n}{n!}$